مسلمة الاختيار، مبرهنة زارميلو، توطئة زورن
برهان ومفاهيم

نسخة للمراجعة رقم 1.01

الأستاذ عبد الحكيم بن الأمين بن شعبانة

هدية لرواد مجموعة ابن البناء المراكشي

الأحد 11 ربيع الأول 1443 ه

الموافق ل 17 أكتوبر من سنة 2021 ميلادية

بسم الله الرحمن الرحيم



فهرس

(1)
مقدمة

الحمد لله رب العالمين و الصلاة والسلام على أشرف المرسلين وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين، أما بعد

مسلمة الاختيار من أهل إحدى ركائز نظرية المجموعات، وهي مكافئة لمبرهنة زارميلو، و توطئة زورن

خاصة هذه الأخيرة فاستعمالاتها كثيرة، لذلك أحببت أن أضع برهانها باللغة العربية بين أيدي المتابعين لمنشورات مجموعة ابن البناء المراكشي وذلك ضمن البرنامج الذي بدأناه في ضبط وتبسيط و شرح الرياضيات وبنائها على أسس سليمة، مع نشرها باللغة العربية

رغم أهمية مسلمة الاختيار و مكافئاتها لم أعثر على برهان التكافؤ باللغة العربية على الشبكة، لذلك راجعت العديد من المراجع الأجنبية بمختلف البراهين خاصة توطئة زورن فاخترت أبسطها فترجمته و بسطته مع زيادة الشرح والضبط ليستفيد منه الإخوة إن شاء الله

فهذه صدقة جارية أرجو أن أنال ثوابها من الله عز وجل وكذلك ينال منه كل من ساهم في تكويني العلمي وأخص بالذكر والشكر الوالدة حفظها الله و الوالد رحمه الله وأستاذي في الثانوي الأستاذ محمد الطاهر ميهاني، وأستاذي الفاضل في الطوبولوجيا الدكتور الحسن واعزار، وأستاذي الفاضل الذي استفدت منه كثيرا في الطوبولوجيا الدكتور محمد حازي وأستاذي الفاضل في نظرية القياس و المكاملة الدكتور يوسف يوسف عتيق، و أستاذي الفاضل في نظرية المجموعات والمنطق الدكتور ناجي هرماس

(2)

(1.2)
مسلمة الاختيار

مسلمة الاختيار هي إحدى ركائز نظرية المجموعات

ZFC

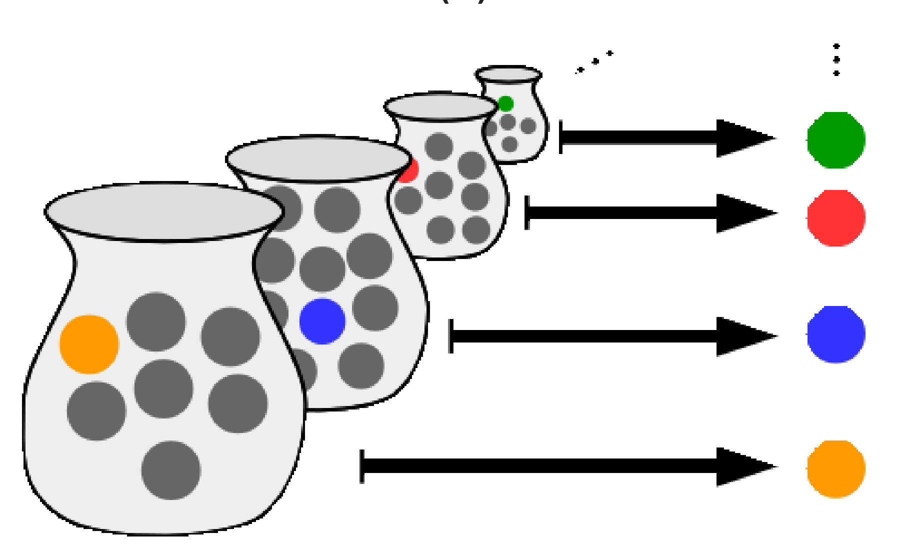
والتي تنص على أنه إذا كانت لدينا مجموعة غير خالية من المجموعات غير الخالية

$$(X \neq \emptyset) \quad \wedge \quad (\forall A \in X : A \neq \emptyset)$$

فإنه يوجد تطبيق من هذه المجموعة نحو اتحاد مجموعاتها يرفق لكل عنصر والذي هو مجموعة نحو عنصر منه

نسمي هذا التطبيق بدالة الاختيار لأنه يختار من كل مجموعة عنصرا منها، سنرمز له كالتالي

$$\mathbf{c}: \ X \to \cup A : A \in X$$
$$A \to \mathbf{c}(A) \in A$$



(2.2)
صياغة ثانية

صياغة ثانية لهذه المبرهنة تنص على أن الجداء الديكارتي لهذه المجموعات غير خالي و هذا يعني وجود عنصر منه فكل احداثية منه هي صورة دالة الاختيار لمجموعتها

(3.2)
شرح

قد تبدو المسلمة بديهية لكن لا بديهية في الرياضيات فالرياضيات كلها مبنية على مسلمات وبراهين

حتي ندرك حجم المشكلة، لنختر مجموعة مجموعات غير خالة فننظر لها عنصرا عنصرا ، فلنختر عنصرا من المجموعة الأولى بما أنها غير خالية

$x(1) \in S(1)$

ثم أخرى وأخرى و هكذا

$x(2) \in S(2)$

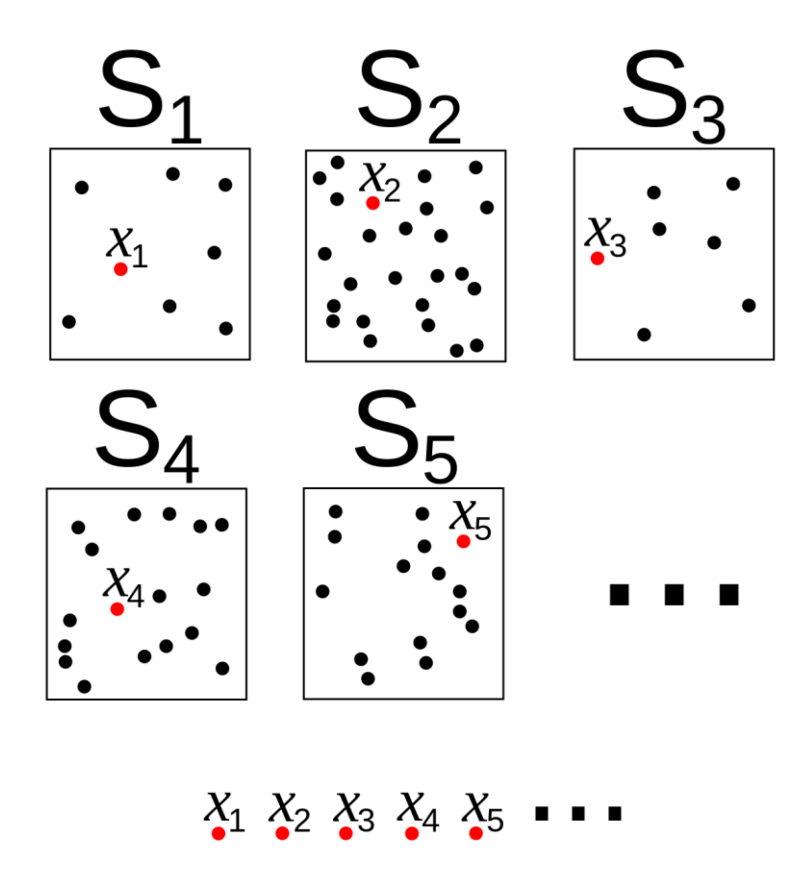
……..

$x(n) \in S(n)$

……

من الواضح أنه إذا كانت مجموعتنا الأم غير منتهية لابد لنا من التسليم بمواصلة الاختيار غير انتهاء، وحتى لو سلمنا بذلك فنختار مجموعة من الشكل

$$\{x(n) : n \in N\}$$



فهي مجموعة قابلة للعد، فإذا كانت مجموعتنا الأم غير قابلة للعد فإننا لن نستغرق جميع عناصرها بهذه الطريقة

بمسلمة الاختيار نسلم بإمكانية ذلك لكن مع دفع ثمن أننا لا ندري كيف نصنع دالة الاختيار ولذلك هذه المسلمة محل خلاف بين المنطقيين فالمنطق الحدسي لا يقبلها لأنها لا تعطي طريقة بنائية لصناعة هذه الاختيارات

(3)

(1.3)
مبرهنة زارملو

تنص مبرهنة زارملو على أن كل مجموعة غير خالية يمكن تزويدها بترتيب جيد، و الترتيب الجيد هو الذي يحقق أن كل جزء غير خال من المجموعة يقبل عنصر أصغري.

الترتيب الجيد يستلزم الترتيب الكلي إذ يكفي وضع عنصرين في مجموعة لكي تقبل هذه الأخيرة عنصرا أصغريا فيتحقق الترتيب بينهما.

$$\{x,y\}$$

(2.3)
استلزام مبرهنة زارملو لمسلمة الاختيار

إذا تمعنا مبرهنة زارملو أدركنا أن مسلمة الاختيار حالة خاصة منها، ففي مسلمة الاختيار نعرف تطبيقا عل مجموعة مجموعات غير خالية نختار به من كل مجموعة عنصرا منها،

فيكفي تزويد اتحادها بعلاقة ترتيب جيد حسب مبرهنة زارملو لكي يكون تطبيقنا هو الذي يختار من كل مجموعة العنصر الأصغري منها و هو مضمون الوجود بالمبرهنة.

(3.3)
شرح

لو قمنا بمثل صنيع المثال السابق فنختار من مجموعة غير خالية العناصر عنصرا عنصرا لترتيبها سنجد

$$x(1) \in X$$

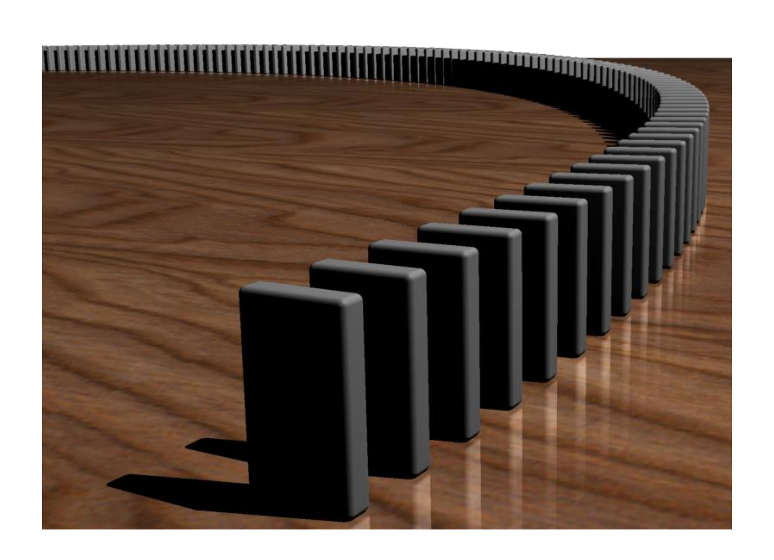
ثم عنصر آخر ثم آخر و هكذا

$$x(2) \in X, \qquad x(1) < x(2)$$

....

$$x(n) \in X, \qquad x(1) < x(2) < \ldots < x(n)$$

......



من الواضح أنه إذا كانت مجموعتنا غير منتهية لابد لنا من التسليم بمواصلة الترتيب من غير انتهاء، وحتى لو سلمنا بذلك فسنصنع مجموعة مرتبة جيدا من الشكل

$$\{x(n) : n \in N\}$$

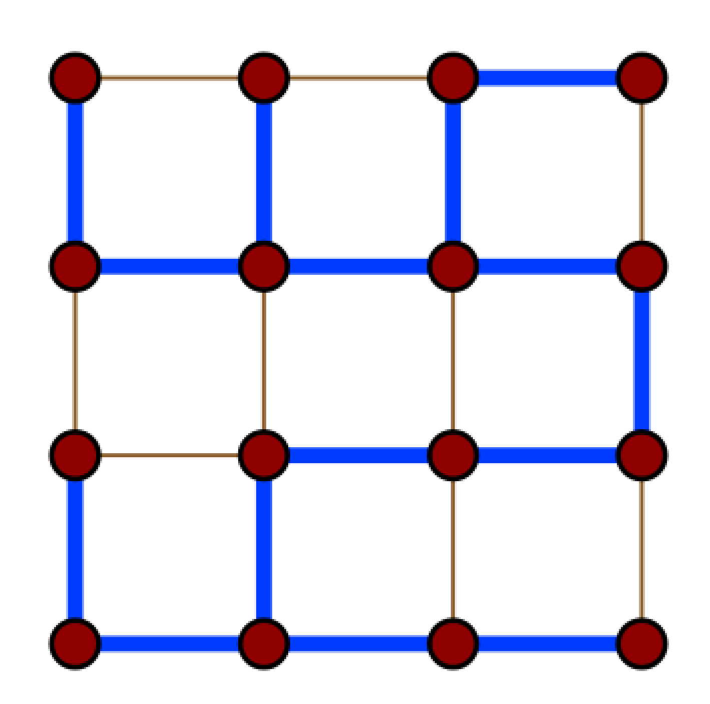
وهي قابلة للعد، فإذا كنا في مجموعات غير قابلة للعد ليس لنا إلا التسليم بإمكانية ذلك، لكن كما يظهر من المثال نحن في معضلة مشابهة لمسلمة الاختيار وقد بينا أن مبرهنة زارملو تستلزم مسلمة الاختيار، بل ذكرنا في المقدمة أنها تكافؤها و تكافؤ توطئة زورن

سنبرهن في الفصول القادمة التكافؤ بين مسلمة الاختيار وتوطئة زورن ، و كذلك استلزام توطئة زورن لمبرهنة زارملو، وبما أننا رأينا هنا استلزام مبرهنة زارملو لمسلمة الاختيار سنكون بذلك قد برهنا على تكافؤ هذه الثلاث

(4)

(1.4)
توطئة زورن

تنص توطئة زورن على أن أي مجموعة استقرائية غير خالية تقبل عنصرا أعظميا، و المجموعة الاستقرائية هي مجموعة مزودة بعملية ترتيب جزئي بحيث كل سلسلة من العناصر مرتبة كليا منها تقبل حدا أعلى



(2.4)
توطئة زورن تستلزم مبرهنة زارملو

سنأخذ كمثال تطبيقي لتوطئة زورن برهنة مبرهنة زارملو، فقد لاحظنا في محاولتنا لبناء ترتيب جيد على مجموعة X في مبرهنة زارملو عنصرا بعنصر أنه تمكنا من صناعة ترتيب لعناصر من الشكل

$$x(i) \in X, 1 \leq i \leq n \in N : x(1) < x(2) < \dots < x(n)$$

لكن المشكلة نحتاج أن نعمم هذا الترتيب و التعميم يحتاج أكثر من صناعة هذا الترتيب عنصرا عنصرا لأننا لن نستطيع استغراق جميع عناصر المجموعة في جميع الحالات خاصة إذا كانت غير قابلة للعد،

للتمكن من ذلك بدل التفكري عنصرا عنصرا سننظر للمسألة بشكل أعم فللنظر لهذه المجموعة التي تشمل جميع الترتيبات الجيدة الممكنة على أجزاء من X وهي مجموعة مكونة من ثنائيات، مجموعة جزئية من X و علاقة ترتيب جيد $\leq$ معرفة عليها

$$O = \{(A, \leq|A) : A \subset X , \leq|A\}$$

حيث رمزنا هنا لعلاقة الترتيب الجيد ب

$$\leq|A$$

نحن نعلم أنه هذه المجموعة غير خالية لأنه تمكنا من صناعة ترتيب جيد على مجموعات جزئية منتهية

يمكننا جعل هذه المجموعة استغراقية عن طريق تزويدها بعلاقة الترتيب التالية

$$(A1, \leq|A1) , (A2, \leq|A2) \in O : (A1, \leq|A1) \leq (A2, \leq|A2)$$

إذا وفقط إذا كان

$$A1 \subset A2$$

وعلاقة الترتيب الجيد على المجموعة الكبرى تمديد لعلاقة الترتيب الجيد على المجموعة الصغرى

إذن بدل تمديد الترتيب عنصرا عنصرا تصورنا جميع الترتيبات الجيدة بتمديداتها، فائدة ذلك أننا صنعنا مجموعة استقرائية فنحن نلاحظ أنه إذا أخذنا سلسلة مرتبة كليا فهي تقبل حدا أعلى و الذي يمكننا صناعته باتحاد المجموعات المرتبة كونها متداخلة واحدة داخل واحدة وتوحيد ترتيباتها بالتمديد :



فإذا كانت لدينا سلسلة مرتبة كليا

$$E = \{(A, \leq|A) \in O\}$$

فسنعرف الحد الأعلى

$$(H, \leq|H)$$

باتحاد المجموعات

$$H = \cup A\,,\ (A, \leq|A) \in E$$

وعلاقة الترتيب $\leq|H$ بين عنصرين x و y من H هي نفسها علاقة الترتيب المعرفة على مجموعة A تشملهما ذلك أنها مجموعات محتواه في بعضها فلابد أن هناك مجموعة أكبر تشمل العنصرين بين هذه المجموعات في الاتحاد

فهذا حد أعلى للسلسة و منه مجموعتنا استقرائية فيمكننا تطبيق توطئة زورن بوجود عنصر أعظمي

$$(S\,, \leq|S)$$

المجموعة S لابد أن تساوي مجموعتنا الأم X لأنه لو كان هناك عنصر z في المجموعة الأم X ليس في المجموعة S فيمكننا إضافته بسهولة للمجموعة S و ترتيبه كعنصر أكبر من جميع عناصرها لنمددها لمجموعة مرتبة جيدا أكبر و هذا تناقض لأنها عنصر أعظمي

$$S \cup \{z\}$$

ومنه

$$S = X$$

والترتيب $\leq|S$ هو ترتيب جيد عليها

فنكون بذلك قد برهنا مبرهنة زارملو

(3.4)
شرح

كما لاحظنا من برهان مبرهنة زارملو توطئة زورن تسمح لنا بتمديد الخاصية من مجموعة بسيطة إلى مجموعات أعم بالاحتواء فكأننا نسلم باستغراق الخاصية على هذه المجموعات المرتبة لنصل لمجموعة أعظمية، فهذه نفسها معضلة الاختيار و معضلة الترتيب، فنحن نستطيع القيام ببناء ذلك في الحالات المنتهية لكن متى كنا في مجموعات غير منتهية وغير قابلة للعد استحال ذلك إلا عن طريق التسليم.

في هذه المبرهنات شبيه بالبرهان بالتراجع إذ هناك خاصة محققة في الحالة الأولى و يمكننا تمديدها من حالة للتي تليها لكن البرهان بالتراجع يستعمل قابلة العد ففي هذه الحالة يمكننا الوصول إلى أي عنصر للتحقق من تحققيه للخاصية عن طريق التقدم عنصرا عنصرا و هذا ما نسميه الاستغراق.

لكن إذا كان عدد العناصر غير قابل للعد استحال ذلك بهذه الطريقة، لذلك نسلم بذلك عبر مسلمة الاختيار أو الترتيب لزارملو أو توطئة زورن

(4.4)
برهان توطئة زورن

(1.4.4)
مسلمة الاختيار تستلزم توطئة زورن

لتكن مجموعة غير خالية استقرائية مزودة بعلاقة ترتيب

$$(X,\leq)$$

للحصول على عنصر أعظمي سنحاول صناعة أكبر سلسلة ممكنة من العناصر المرتبة كليا وفي آخرها سنجد عنصرنا الأعظمي.

محاولة ساذجة عن طريق صناعة سلسلة أعظمية عنصرا عنصرا

سنسمي مجموعة المجموعات الجزئية من X التي تقبل حدا أعلى تماما ب ξ أي

$$\xi = \{A \subset X : \exists s : (s \in X) \wedge (s \notin A) \wedge (\forall a \in A : a < s)\}$$

نلاحظ أن المجموعة الخالية هي عنصر من ξ لأن كل العناصر هي حد أعلى لها

الآن سننطلق من مسلمة الاختيار التي تخبرنا أن مجموعة المجموعات الجزئية ل X إذا استثنينا منها المجموعة الخالية تقبل دالة اختيار تمكننا من اختيار من كل مجموعة عنصرا منها ولنسمي الدالة c فيكون لدينا :

$$\begin{aligned} c : P(X) \setminus \emptyset &\to X \\ A &\to c(A) \in A \end{aligned}$$

الآن سنختار بهذه الدالة لكل عنصر من ξ حدا أعلى له من حدوده العليا تماما فنعرف الدالة m بواسطة دالة الاختيار المطبقة على مجموعة الحدود العليا تماما بأنها ترفق لكل عنصر بحد من حدوده العليا تماما

$$\forall A \in \xi : m(A) = c(\{s \in X : (\forall a \in A : a < s\})$$

الحد الأعلى تماما لمجموعة هو حد أعلى لها لا ينتمي إليها

فكرة البرهان أن ننطلق من المجموعة الخالية فنختار لها حدا فنضع

$$s(0) = m(\emptyset)$$

ثم نختار حدا أعلى ل s(0) باعتبار أن المجموعة {s(0)} مرتبة كليا فحسب شروط توطئة زورن كل مجموعة مرتبة كليا تقبل حدا أعلى فنضع

$$s(1) = m(\{s(0)\})$$

فنحصل على سلسلة جديدة مرتبة كليا $\{s(0),s(1)\}$ ونواصل هكذا ما دام كل مجموعة نحصل عليها هي تنتمي ل ع أي تقبل حدا أعلى تماما فيمكننا أن نكتب

$$\mathbf{s(n+1) = m(\{s(0),\ldots,s(n)\})}$$

فنحن نرتب الحدود واحدا واحدا

$$s(0) < s(1) < \ldots < s(n) < s(n+1)$$

سنتوقف إذا وصلنا إلى $s(k)$ أعظمي لكن إذا لم نصل لذلك سنواصل إلى المالانهاية فنشكل المجموعة

$$\mathbf{E = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\}}$$

وهي سلسلة مرتبة كليا فحسب شروط توطئة زورن تقبل حدا أعلى وليكن M وهو لا ينتمي إليها وإلا لكانت E منتهية وتوقفنا عنده في عملية بناء الحدود.

إذن المجموعة E هي عنصر من مجموعتنا ع فهي تقبل حدا أعلى تماما.

سنضع على نفس الطريقة :

$$\mathbf{s(\infty) = m(E)}$$

يمكننا أن نضيف هذا الحد الجديد ل E ونواصل المسيرة كما فعلنا سابقا حتى نصل لعنصر أعظمي.

لكن المشكلة التي تواجهنا هنا أن هذه الطريقة قابلة للعد وقد لا تتوقف كما لاحظنا مع E

وهذا ما لمسناه فيما سبق مع المبرهنات الأخرى

فنحتاج تسريعها بطريقة مختلفة لذلك سننظر للطريقة السابقة بشكل عام لا خاص كما فعلنا بصناعتها عنصرا بعنصرا.

البرهان عن طريق مسلمة الفهم

لو تأملنا البرهان السابق فنحن بدأنا من المجموعة الخالية ثم صنعنا سلسلة بحد ثم الذي يليه ثم الذي يليه وهكذا فنحن نحتاج لهذه السلسة التي تنطلق من أول حد ثم تواصل المسيرة بالترتيب أو ما نسميها بالجزء الأولي وخاصية كل منها أنها ليس هناك حد قبلها أو أصغر من عناصرها.

لصناعة هذه المجموعات بدل استعمال البناء عنصرا عنصرا سنستعمل مسلمة الفهم في نظرية المجموعات لتشكيل مجموعات لها نفس خواص مجموعتنا السابقة

سنعرف الجزء الأولي كالتالي : إذا كان لدينا مجموعتين S و A من X فنقول عن S أنها جزء أولي من A إذا وفقط إذا حققت :

$$S \subset A$$
$$\forall x \in A, \forall y \in S : x \leq y \Rightarrow x \in S$$

إذن الجزء الأولي هو محاولة لتعميم المجموعة E فاشترطنا فيه أنه لا توجد حدود قبل عناصره أي كل عنصر أصغر من عنصر منه هو فيه لكن كما تلاحظون لم نشترط الترتيب الكلي وسنعوض هذا الشرط بتعريف قادم.

نلاحظ كذلك أن المجموعة الخالية هي جزء أولي لأنه لا توجد عناصر أصغر من عناصره.

سنحتاج الآن لإدخال الترتيب الكلي لتكوين سلسلتنا فسنعرف مفهوم المجموعة الجيدة والتي ستمكننا من بناء أكبر سلسلة مرتبة كليا.

فنقول عن المجموعة B وهي جزء من X أنها مجموعة جيدة إذا وفقط إذا حققت :

المجموعة B مرتبة كليا.

من أجل كل جزء أولي S من B يختلف عنها، المجموعة S عندها حدود عليا تماما في B بحيث

$$m(S)$$

هو أصغرها في B.

فكما تلاحظون بدل اضافة الحدود العليا حدا حدا سننظر لجميع المجموعات التي تحقق هذا الشرط

كمثال عن مجموعة جيدة المجموعة التي كوناها سابقا :

$$\{s(0),s(1),\ldots,s(n)\}$$

والمجموعة E كذلك مجموعة جيدة فكما تلاحظون نحن لا ننطلق من فراغ بل نريد إكمال هذه المجموعات بشرط الترتيب الكلي محاولة منا لإكمال الجزء الأولي فنحن بهذا التعريف نحتاج صناعة أكبر سلسلة ممكنة والتي في نهايتها سنجد عنصرنا الأعظمي.

نلاحظ كذلك أن المجموعة الخالية جزء أولي من B فأحد حدودها العليا موجود في B.

الآن نحتاج أكبر مجموعة جيدة وهذه نكونها بسهولة عن طريق توحيد كل هذه المجموعات الجيدة في X في مجموعة نسميها U

هذا التوحيد مضمون بمسلمة الفهم لأنها مجموعات جزئية من X.

لكن نحتاج أن نبرهن أن U مجموعة جيدة بدورها وهذا يعني أن المجموعات الجيدة محتواه في بعضها البعض.

الذي نستفيده من كون U مجموعة جيدة هو أنها مرتبة كليا ومنه حسب شروط توطئة زورن تقبل حدا أعلى على الأقل.

هذه الحدود العليا لابد أن تنتمي ل U ولولا ذلك لأمكننا صناعة مجموعة جديدة أكبر من U عن طريق ضم حد أعلى M لا ينتمي إليها إليها أي

$$U \cup \{M\}$$

وهذا غير ممكن لأن U تشمل جميع المجموعات الجيدة فهي اتحادها وهي أكبرها.

إذن بما أن M الحد الأعلى ل U ينتمي ل U وهي مرتبة كليا فهو وحيد فهو عنصر أعظمي لأنه الحد الأعلى الوحيد ل U التي هي أكبر ترتيب كلي وجدناه.

ومنه نكون وجدنا عنصرنا الأعظمي وبرهنا توطئة زورن.

المجموعات الجيدة محتواة في بعضها البعض



إذا أخذنا A و B مجموعتان جيدتان غير خاليتين فسنبرهن أنه إما A جزء أولي من B أو العكس أي إحداهما تشمل الأخرى.

بما أن الحد الأعلى للمجموعة الخالية موجود في كليهما فلدينا

$$m(\emptyset) \in A \cap B$$

فتقاطعهما غير خال.

ليكن a من هذا التقاطع ونضع

$$I(a,A) = \{x \in A : x < a\}$$

من التعريف هذا جزء أولي في A

وبنفس الطريقة

$$I(a,B) = \{x \in B : x < a\}$$

من التعريف هذا جزء أولي في B

سنحاول بناء أكبر جزء أولي مشترك بين A و B عن طريق :

$$C = \{a \in A \cap B : I(a,A) = I(a,B)\}$$

لنبرهن أن C جزء أولي من A فلنضع :

$$x \in C, y \in A : y \leqslant x$$

سنبين أن y ينتمي ل C

الحالة الأولى و هي $x = y$ واضحة

بقيت حالة $y < x$

لدينا

$$y \in I(a,A) = I(a,B)$$

لأنها أجزاء أولية ومنه y ينتمي ل B لأن $I(a,B)$ محتواه في B

ومنه

$$y \in A \cap B$$

فإذا أخذنا

$$I(y,A) = \{z \in A : z < y\}$$

فلدينا

$$z < y < x$$

إذن

$$y \in I(x,A) = I(x,B)$$

ومنه

$$z < y \text{ و } z \in B$$

إذن

$$z \in I(y,B)$$

فنستنتج أن

$$I(y,A) \subset I(y,B)$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$I(y,B) \subset I(y,A)$$

أي

$$y \in A \cap B \wedge I(y,A) = I(y,B)$$

ومنه

$$y \in C$$

إذن C هو جزء أولي من A و هو جزء أولي كذلك من B.

الآن سنبين أن C تساوي A أو تساوي B.

لنفرض أن C تختلف عن كليهما فحسب تعريف المجموعة الجيدة، الحد الأصغر للمجموعة C موجود في A و B أي

$$m(C) \in A \cap B$$

ومنه

$$I\ (m(c),A) = I\ (m(c),B)$$

إذن

$$m(C) \in C$$

وهذا تناقض لأنه حد أعلى تماما فلا يمكنه أن ينتمي ل C.

ومنه إما C تساوي A أو C تساوي B وبما أنها محتواه في تقاطعهما ف A جزء أولي محتواه في B أو العكس وهو المطلوب.

ومنه نستنتج أن المجموعة U الناتجة من اتحاد المجموعات الجيدة مرتبة كليا ذلك أنه إذا أخذنا عنصرين ، x من مجموعة جيدة A من الاتحادات و y من B من الاتحادات فنحن نعلم أنه إما A في B أو B في A ، كيفما كان الأمر x و y موجودان في أكبرهما فهما مرتبتان لأن أكبر المجموعتين مرتبة كليا.

كل المجموعات الجيدة من U هي أجزاء أولية منها :

إذا أخذنا مجموعة جيدة A من U وأخذنا منها عنصر x وأخذنا عنصرا y من U بحيث

$$y \leqslant x$$

لدينا y ينتمي لمجموعة جيدة B محتواه في U.

فنحن نعلم حسب ما برهناه سابقا أنه إما A جزء أولي من B فعلى هذا كون

$$y \leqslant x$$

يعنى أن y من A.

وإما B جزء أولي من A وبما أن y من B فهو من A.

إذن في الحالتين y من A ومنه المطلوب.

المجموعة U مجموعة جيدة :

نعلم أن U مرتبة كليا.

لنأخذ S جزء أولي من U ومختلف عنه.

لنأخذ الآن

$$z \in U \setminus S$$

ولتكن A مجموعة جيدة ينتمي إليها z.

إذن المجموعة S تقبل على الأقل حدا أعلى تماما وهو z.

بقي أن نبين أن الحد الأعلى $m(S)$ هو أصغر هذه الحدود العليا تماما ل S داخل U.

سنبين أن S جزء أولي من A.

ليكن x من S و y من A بحيث $y \leqslant x$

بما أن y من U و S جزء أولي من U فنستنتج أن y ينتمي ل S.

وبما أن $x \leqslant z \in A$ و A جزء أولي من U حسب البرهان السابق فنستنتج أن

$$x \in A$$

إذن S جزء أولي من A وهو مختلف عنها بسبب وجود z في A.

إذن حسب تعريف المجموعة الجيدة يكون m(S) هو أصغر حدود S داخل A ومنه هو أصغرها في U لأنه لو كان هناك أصغر منه y يكون لدينا

$$m(S) \in A > y$$

ومنه y من A بسبب أنها قطعة أولية وهذا تناقض لأن m(S) هو أصغر الحدود العليا تماما ل S في A.

ومنه U مجموعة جيدة.

إذن نكون هنا قد برهنا على أن مسلمة الاختيار تستلزم توطئة زورن.

(2.4.4)
توطئة زورن تستلزم مسلمة الاختيار

سنفرض أن كل مجموعة استقرائية تملك عنصرا أعظميا.

لنأخذ الآن مجموعة C عناصرها مجموعات غير خالية.

فكرة البرهان أنه يمكننا أن ننطلق من مجموعة A تشمل عددا منتهيا من العناصر من C فنصنع لها تطبيقا ينقل كل مجموعة a فيها نحو عنصر منها أي من a فهذا لا يحتاج لمسلمة الاختيار لأن عدد المجموعات منته.

ثم نمدد هذه الدالة بعلاقة ترتيب حتى نصل لعنصر أعظمي عبر توطئة زورن فيكون هذا هو دالة الاختيار الذي نبحث عنها.

لنضع B هو اتحاد عناصر C ونضع المجموعات الممكنة التي نستطيع تعريف عليها دالة الاختيار.

$$X = \{(A,c) \subset C : c \rightarrow B \text{ , } c(a) \in a\}$$

كما تقدم من مقدمة الفقرة هذه مجموعة غير خالية.

سنبين أن X مجموعة استقرائية بالترتيب المكون من تمديد دوال الاختيار أي :

$$[(A1,c1) \leqslant (A2,c2)] \Leftrightarrow [A1 \subset A2 \wedge c2|A1 = c1]$$

أي أن c2 هو تمديد ل c1.

نلاحظ أن أي جزء H مرتب كليا من X يملك حدا أعلى المشكل من الاتحادات أي $(U\ A \in H,\ d)$

حيث d هي دالة اختيار تأخذ لكل عنصر a من A محتوي في C نحو صورته بواسطة دالة الاختيار ل A.

نلاحظ هنا أنه لا يهم كون a من A أو B داخل H لأن ترتيب H يجعل أنه إما

$B \subset A$ أو $A \subset B$

إذن دالة الاختيار على B تمديد لدالة الاختيار على A أو العكس وفي كلتا الحالتين صورة a تبقى وحيدة.

يمكننا أن نرى d كنهاية توسعة التمديدات المرتبة لدوال الاختيار.

إذن X مجموعة استقرائية فحسب توطئة زورن هي تقبر عنصرا أعظميا (M,c)

ومنه يجب أن يكون $M = C$

لأنه لو كان هناك عنصر z من C ليس في M فيمكننا تمديد M كالتالي

$$M' = M \cup \{z\}$$

وتمديد c عند z بوضع صورة ل z بعنصر من z

وهذا تناقض لأن (M,c) أعظمي إذن عنصرنا هو (C,c) فوجدنا دالة الاختيار c على C.

(5)

مبرهنات نستعمل فيها مسلمة الاختيار أو ما يكافئها

- كل فضاء شعاعي يحتوي على قاعدة له :

يمكن برهنة ذلك بتوطئة زورن بنفس الطريقة التي استعملناها في هذا المقال، والتي يمكن أن نجردها كالتالي :

- نعرف خاصية على مجموعة : خاصيتنا هنا هي مجموعة أشعة مستقلة
- نبين أن مجموعة المجموعات التي تحقق هذه الخاصية غير خالية و هذا واضح باختيار شعاع غير معدوم ووضعه في مجموعة أحادية.
- نعرف علاقة ترتيب وعادة تكون الاحتواء بين هذه المجموعات
- نبين أن مجموعتنا استقرائية و ذلك لوجود الحد الأعظمي عن طريق اتحاد المجموعات المرتبة
- نستنتج أن هناك عنصر أعظمي و هو مجموعة تحقق خاصية الاستقلال الخطي فيما بين أشعتها
- وأخيرا نبين أنها قاعدة بالخلف بفرض وجود شعاع لا يكتب بها فهو مستقل خطي عنها فيمكن تمديدها لمجموعة أكبر تحقق الخاصية و منه التناقض لأنها أعظمية.

- مبرهنة تيشونوف

Théorème de Tychonoff

كل جداء ديكارتي لفاضاءات شبه متراصة هو فضاء شبه متراص

- مبرهنة كرول

Théorème de Krull

- متناقضة ستارسكي باناخ

Paradoxe de Banach-Tarski

التي تنص على أنه من الممكن قطع كرة من الفضاء إلى عدد محدود من القطع وإعادة تجميع هذه القطع لتشكيل كرتين متطابقتين مع الأولى ، باستثناء إزاحة واحدة



- بناء مجموعات غير قابلة للقياس في مجموعة الأعداد الحقيقية يحتاج لمسلمة الاختيار

(6)
مبرهنات أخرى مكافئة لمسلمة الاختيار

مسلمة الاختيار تكافؤ مبرهنات أخرى نذكر منها

مبرهنة الحد الأقصى لهوسدورف
Théorème de maximalité de Hausdorff

والتي تنص على أن أي مجموعة مرتبة تحتوي على جزء مرتب كليا أعظمي

Hartogs théorème

Idempotence des cardinaux infinis

الجداء الديكارتي لمجموعات غير خالية هو مجموعة غير خالية

(7)
انفصال مسلمة الاختيار عن النظام المسلماتي ZFC

سنة 1938 برهن كورت غودل Kurt Gödel أن النظام المسلماتي ZF (Zermelo-Fraenkel) إذا كان متناسق فهو لا يناقض مسلمة الاختيار

سنة 1963 برهن بول كوهين Paul Cohen أن النظام المسلماتي ZF إذا كان متناسقا فهو لا يبرهن مسلمة الاختيار

كنتيجة للمبرهنتين مسلمة الاختيار منفصله عن النظام المسلماتي ZF

(8)
إبسيلون هلبرت

إبسيلون هلبرت، هو تمديد للغة الشكلية المنطقية بالمؤثر إبسيلون الذي أدخله هلبرت، و الذي استعملته مجموعة بورباكي بكثرة في منشوراتها.

مع المؤثر إبسيلون، كل خاصية P مرتبطة بالكائن $\varepsilon x.P(x)$ بحيث P محققة على الأقل من أجل عنصر إذن P محققة ب $\varepsilon x.P(x)$

مع إبسيلون هلبرت تصبح مسلمة الاختيار مبرهنة.

(9)
قائمة المراجع

Cours 2011/2012 d’Arnaud DEBUSSCHE - ENS Cachan Antenne de Bretagne

Axiome du choix. . .ou pas. Cyrille Hériveaux - ENS Cachan

Démonstration du lemme de Zorn. Paris 7, L3 –théorie des ensembles

Quelques théorèmes classiques qui sont des conséquences de l’axiome du choix Alain Prouté

Axiome du choix Patrick Dehornoy

Autour de l’axiome du choix Jean-Marie Aubry